6. Énoncés des exercices

Exercice 10.1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions ci-dessous :

1. $f(x) = \ln(2x-1) + \ln(-x+5)$
2. $g(x) = \ln((2x-1)(-x+5))$
3. $h(x) = \ln(1+x^2)$
4. $i(x) = \ln(1+e^{2x})$

Exercice 10.2 Exprimer en fonction de $\ln 2$ les réels suivants : $\ln 8$; $\ln(\frac{1}{4})$; $\ln(16e)$; $\ln\sqrt{2}$; $\ln(\frac{64}{e^2})$

Exercice 10.3 Simplifier les expressions suivantes :
$\ln((\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1))$; $\ln(\sqrt{7}-2) + \ln(\sqrt{7}+2)$; $\ln(\sqrt{\sqrt{11}-3}) + \ln(\sqrt{\sqrt{11}+3})$

Exercice 10.4 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :
$f(x) = \ln(4x+1), \quad x \in]-\frac{1}{4}; +\infty[$
$g(x) = \ln(1-x^2), \quad x \in]-1; 1[$

Exercice 10.5 Pour chacune des fonctions suivantes, préciser l'ensemble de définition, de dérivabilité, et calculer la dérivée.

1. $f(x) = (\ln x)^2$
2. $g(x) = \ln(\ln x)$
3. $h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Exercice 10.6 Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de leurs ensembles de définitions respectifs, et indiquer les éventuelles asymptotes.

1. $x \mapsto x - \ln x$
2. $x \mapsto x\ln(\sqrt{x})$
3. $x \mapsto x - \ln(x^2)$
4. $x \mapsto \frac{\ln(2x)}{x^2+1}$

Exercice 10.7 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x}\ln x$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x}\ln x$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$

Exercice 10.8 Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x-2) = 11$
2. $\ln(3-2x) = -11$
3. $\ln(4x+1) = 0$
4. $\ln\left(7 - \frac{1}{2}x\right) = 1$

Exercice 10.9 Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln\left(\frac{x+1}{2x+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
2. $\ln(3x-1) - \ln(x+2) = -\ln(2)$

Exercice 10.10 Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(x) \geqslant \ln 4 - \ln(x+1)$
2. $\ln(1+e^x) + \ln(1-e^x) \geqslant \frac{1}{2}$

Méthode Dans les deux exercices suivants, nous allons intégrer des fractions rationnelles ("quotients de polynômes") en utilisant une *décomposition en éléments simples* : il s'agit d'écrire la fraction rationnelle sous la forme d'une somme de fractions plus faciles à intégrer.
Un exemple de cette méthode est donné dans l'exercice résolu 3 p.188.

Exercice 10.11 Soit f la fonction définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x)=\frac{5x-2}{x-3}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $x\in]3;+\infty[$, $f(x)=a+\frac{b}{x-3}$
2. En déduire toutes les primitives de f sur $]3;+\infty[$

Exercice 10.12 Soit $f(x)=\frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $\quad x\in]1;+\infty[$.

1. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que : $\forall x\in]1;+\infty[$, $f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+3}-\frac{c}{(x+3)^2}$
2. En déduire la primitive de f sur $]1;+\infty[$ qui s'annule en 2.

Problème de Bac

Soit (v_n) la suite définie par

$$v_1=\ln(2)\quad \text{et, pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } v_{n+1}=\ln\left(2-\mathrm{e}^{-v_n}\right).$$

On admet que cette suite est définie pour tout entier naturel n non nul.
On définit ensuite la suite (S_n) pour tout entier naturel n non nul par :

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} v_k=v_1+v_2+\cdots+v_n.$$

Le but de cet exercice est de déterminer la limite de (S_n).

Partie A – Conjectures à l'aide d'un algorithme

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant qui calcule et affiche la valeur de S_n pour une valeur de n choisie par l'utilisateur :

Variables :	n, k entiers
	S, v réels
Initialisation :	Saisir la valeur de n
	v prend la valeur ...
	S prend la valeur ...
Traitement :	Pour k variant de ... à ... faire
	...prend la valeur ...
	...prend la valeur ...
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

2. À l'aide de cet algorithme, on obtient quelques valeurs de S_n. Les valeurs arrondies au dixième sont données dans le tableau ci-dessous :

n	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000
S_n	2,4	4,6	6,9	9,2	11,5	13,8

En expliquant votre démarche, émettre une conjecture quant au comportement de la suite (S_n).

Partie B – Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par $u_n=\mathrm{e}^{v_n}$.

1. Vérifier que $u_1=2$ et que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1}=2-\dfrac{1}{u_n}$.
2. Calculer u_2, u_3 et u_4. Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n=\dfrac{n+1}{n}$.

Partie C – Étude de (Sn)

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer v_n en fonction de u_n, puis v_n en fonction de n.
2. Vérifier que $S_3 = \ln(4)$.
3. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer S_n en fonction de n. En déduire la limite de la suite (S_n).